极值点偏移问题初探

--从2022年高考数学全国甲卷第21题谈起

智业天成 数学研究员 李登松

极值点偏移问题是高中数学中常见的一类问题.极值点偏移问题是近年的高考和模拟考试的热点，常以解答题的形式出现，此类问题综合性较强，考查方式灵活，渗透数形结合、分类讨论、函数与方程等数学思想方法，对学生的思维能力要求较高.下面我们探究此类问题的常见的解题方法.

高考题试解:（2022年高考数学全国甲卷第21题）已知函数．

（1）若，求*a*的取值范围；

（2）证明：若有两个零点，则．

分析：（1）的定义域为，，令,解得，

当单调递减，当单调递增，所以，若,则,解得，即的取值范围为.

（2）解法一：由（1）知，在上单调递减，在上单调递增，所以不妨，要证,即证，因为,即证

因为,即证，

即证，

即证，

下面证明时，，

设，

则

，

设

所以,而，所以,所以，

所以在单调递增，即,所以，

令，，

所以在单调递减，即,所以；

综上, 若有两个零点，则.

解法二：令，所以在上恒成立，所以在上单调递增，所以若有零点，则有唯一零点，记为，即.若有两个零点，即有两个零点，即方程有两个零点，所以有两个零点.令，所以有两个零点.，当时，，单调递减，当时，，单调递增,所以不妨设.要证,即证，因为,即证

因为,即证，令，所以在上恒成立，所以在上单调递减，所以，又，所以，即.

综上, 若有两个零点，则.

解法三：令，所以在上恒成立，所以在上单调递增，所以若有零点，则有唯一零点，记为，即.若有两个零点，即有两个零点，即方程有两个零点，所以有两个零点，不妨设，所以.令，所以，所以.要证,即证，即证，即证，即证，即证,

令，所以在上恒成立，所以在上单调递减，所以，又，所以，即.

综上, 若有两个零点，则.

解法一和解法二，通过构造新函数，从而达到消元的目的. 大致分为以下三步：

第一步：求导，获得的单调性，极值情况，作出的图像，由得的取值范围（数形结合）；第二步：构造辅助函数（对结论，构造；对结论，构造），求导，限定范围（或的范围），判定符号，获得不等式；第三步：代入（或），利用及的单调性证明最终结论．

解法三，通过引入新的参数，从而达到消元的目的.以上三种解法均实现了将多元变量进行消元，转化为一元变量问题.