

2024 届高三名校周考阶梯训练·数学卷(八)

三角函数的图象和性质

满分分值:100 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

- 函数 $y = \tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的定义域是
 - $\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \pi + k\pi (k \in \mathbf{Z})\}$
 - $\left\{x \left| x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbf{Z}) \right.\right\}$
 - $\{x | x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \pi + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})\}$
 - $\left\{x \left| x \in \mathbf{R} \text{ 且 } x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z}) \right.\right\}$
- 已知函数 $f(x) = (\cos 2x \cos x + \sin 2x \sin x) \sin x, x \in \mathbf{R}$, 则 $f(x)$ 是
 - 最小正周期为 π 的偶函数
 - 最小正周期为 π 的奇函数
 - 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的奇函数
 - 最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$ 的偶函数
- 已知 $f(x) = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right), 0 < \omega < 1$, 且 $f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, 则 $\omega =$
 - $\frac{1}{2}$
 - $\frac{2}{3}$
 - $\frac{3}{4}$
 - $\frac{4}{5}$
- 由函数 $f(x) = \cos 2x - \sqrt{3} \sin 2x$ 的图象变换得到函数 $g(x) = 2\cos x$ 的图象, 则下列变换过程正确的是
 - 把 $f(x)$ 上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 $g(x)$
 - 把 $f(x)$ 上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 再把得到的曲线向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到曲线 $g(x)$
 - 把 $f(x)$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把得到的曲线上各点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 纵坐标不变, 得到曲线 $g(x)$
 - 把 $f(x)$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 再把得到的曲线上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍, 纵坐标不变, 得到曲线 $g(x)$
- 已知函数 $f(x) = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{4}\right) (\omega > 0)$ 在区间 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增, 则 ω 的取值范围是
 - $\left[0, \frac{1}{3}\right]$
 - $\left(0, \frac{1}{2}\right]$
 - $\left[-\frac{1}{2}, 0\right)$
 - $\left[-\frac{1}{3}, 0\right]$
- 已知函数 $f(x) = a\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{3}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ 是奇函数, $g(x) = f\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$, 若关于 x 的方程 $g(x) = m$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ 上有两个不相等实根, 则实数 m 的取值范围是
 - $\left[\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \sqrt{6}\right)$
 - $[\sqrt{3}, \sqrt{6})$
 - $\left[\frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}\right)$
 - $[\sqrt{6}, 2\sqrt{3})$

7. 已知函数 $f(x) = 3\cos\left(\omega x - \frac{\pi}{5}\right)$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, \pi]$ 上恰有 3 个极值点, 2 个零点, 则 ω 的取值范围是

- A. $\left[\frac{11}{5}, \frac{27}{10}\right)$ B. $\left(\frac{11}{5}, \frac{27}{10}\right)$ C. $\left(\frac{11}{5}, \frac{16}{5}\right)$ D. $\left[\frac{11}{5}, \frac{16}{5}\right)$

8. 已知函数 $f(x) = 2\sin\left(\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$), $f(x_1) - f(x_2) = 4$, 且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \frac{\pi}{2}$, 则

A. $f(x)$ 的图象关于 $x = -\frac{\pi}{3}$ 对称

B. $f(x)$ 的单调递增区间为 $\left[-\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

C. 当 $x \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}\right]$ 时, $f(x)$ 的值域为 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

D. $f(x)$ 的图象可由函数 $y = 2\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度获得

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 若将函数 $y = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$) 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后, 与函数 $y = \sin\left(\omega x + \frac{\pi}{12}\right)$ 的图象重合, 则 ω 的值可能是

- A. $\frac{47}{2}$ B. $\frac{35}{2}$ C. $\frac{23}{2}$ D. $\frac{11}{2}$

10. 将函数 $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则下列说法正确的是

A. $g\left(\frac{9\pi}{2}\right) = \sqrt{3}$

B. $\left(\frac{7\pi}{12}, 0\right)$ 是函数 $g(x)$ 图象的一个对称中心

C. 函数 $g(x)$ 在 $\left[2\pi, \frac{7\pi}{3}\right]$ 上单调递增

D. 函数 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right]$ 上的值域是 $[-\sqrt{3}, 1]$

11. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \sqrt{3}\cos^2 \frac{x}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$, 则

A. $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $y = -\cos x$ 的图象

B. $f(x)$ 的图象与 $g(x) = \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)$ 的图象关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的单调递减区间为 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{6}, 2k\pi + \frac{7\pi}{6}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$)

D. $f(x)$ 在 $[0, a]$ 上有 3 个零点, 则实数 a 的取值范围是 $\left[\frac{8\pi}{3}, \frac{11\pi}{3}\right]$

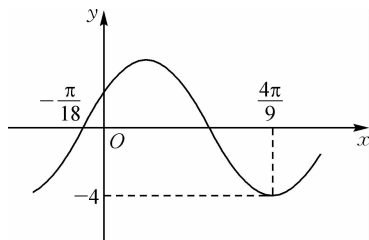
12. 已知函数 $f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则下列说法正确的是

A. $\varphi = \frac{\pi}{6}$

B. $f(x)$ 图象的一条对称轴的方程为 $x = -\frac{5\pi}{9}$

C. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{29\pi}{36}, -\frac{17\pi}{36}\right)$ 上单调递增

D. $f(x) \geq 2$ 的解集为 $\left[\frac{2k\pi}{3}, \frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}\right]$ ($k \in \mathbb{Z}$)



选择题答题栏

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知函数 $f(x) = 4\sin\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ ($\omega > 0$), A, B 是函数 $y = f(x)$ 图象上相邻的最高点和最低点,若 $|AB| = 4\sqrt{5}$,则 $f(2) =$ _____.

14. 函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{7\pi}{2}\right) - 3\cos x$ 的最小值是_____.

15. 已知 $f(x) = 3\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$,将 $f(x)$ 的图象先保持纵坐标不变,横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$,然后向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位长度,得到函数 $g(x)$ 的图象,则在 $g(x)$ 图象的对称轴中,离 y 轴最近的一条对称轴的方程为_____.

16. 将函数 $f(x) = \sin 2x$ 的图象沿 x 轴向左平移 φ ($\varphi > 0$) 个单位长度,得到函数 $y = g(x)$ 的图象,若 $y = g(x)$ 的一个零点为 $\frac{\pi}{8}$,则 φ 的最小值是_____.

四、解答题:共 20 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 2\cos^2 x + 1$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调递减区间和对称中心;

(2) 将函数 $y = f(x)$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度,再将得到的图象上各点的横坐标伸长为原来的 2 倍(纵坐标不变),得到函数 $y = g(x)$ 的图象,求 $g(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{12}, \frac{3\pi}{4}\right]$ 上的值域.

18. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$), 再从条件①、条件②、条件③这三个条件中选择两个作为一组已知条件, 使 $f(x)$ 的解析式唯一确定.

(1) 求 $f(x)$ 的解析式;

(2) 设函数 $g(x) = f(x) + f\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$, 若 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 且 $g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{6\sqrt{3}}{5}$, 求 $f\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{24}\right)$ 的值.

条件①: $f(0) = 0$;

条件②: $f(x)$ 图象的一条对称轴为 $x = -\frac{\pi}{4}$;

条件③: 若 $f(x_1) = 2, f(x_2) = -2$, 且 $|x_1 - x_2|$ 的最小值为 $\frac{\pi}{2}$.

注: 如果选择多组条件分别解答, 按第一个解答计分.