全国名校高三单元检测示范卷

（新教材高考）

编 写 说 明

《全国名校高三单元检测示范卷》是高三一轮复习过程中的阶段性练习或检测用卷，是学生在复习备考过程中对所复习知识的即时巩固和拓展提高性试卷。

各科单元套数、开本如下：

学科	语文	数学	英语	物理	化学	生物	思想政治	历史	地理
套数	21	21	21	15	15	15	15	15	15
开本	6K	6K	6K	6K	6K	6K	6K	6K	6K

《全国名校高三单元检测示范卷》具有如下特点：

1. 依据教材单元顺序，科学划分考查单元，切准考点针对练习，配套一轮复习，验收阶段成绩，评估复习效果；
2. 以必备知识为主线，紧扣单元内容，注重基础提升的同时强化知识间的联系，达到触类旁通，巩固单元成果；
3. 试题材料新颖灵活，绝大部分为原创或深度改编题，能有效培养学生的理解、运用、迁移和创新等关键能力；
4. 汇集名校名师资源，渗透最新信息，导向权威精准，通过解题归纳技巧方法，提升学科素养，备考事半功倍；
5. 根据《普通高中课程方案》(2017 年版 2020 年修订)和各学科的课程标准编写，针对新高考分省命题现状编写各省专版。

《全国名校高三单元检测示范卷》编委会

2023 年 1 月

数学目录

CONTENTS

数学(五)参考答案

1. A　因为 $f(x)=\dfrac{\ln(x+3)}{\sqrt{1-2^x}}$，所以要使函数 $f(x)$ 有意义，需使 $\begin{cases}x+3>0,\\1-2^x>0,\end{cases}$ 即 $-3<x<0$. 故选 A.

2. B　若 $a<2$，则 $a+\dfrac{1}{a}=2$，解得 $a=1$；若 $a\geqslant2$，则 $a^2-7=2$，解得 $a=-3$（舍）或 $a=3$. 综上，实数 a 的值为 1 或 3. 故选 B.

3. C　$\because f(x)=2x-e^x$，$\therefore f'(x)=2-e^x$. 令 $f'(x)=0$，则 $x=\ln 2$. 分析知函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(-\infty,\ln 2]$. 故选 C.

4. A　函数 $f(x)=\begin{cases}(\sqrt{2})^x, x\leqslant1,\\-\ln x, x>1,\end{cases}$ 则 $y=f(2-x)=\begin{cases}(\sqrt{2})^{2-x}, x\geqslant1,\\-\ln(2-x), x<1.\end{cases}$ 当 $x\geqslant1$ 时，函数 $f(2-x)$ 单调递减；当 $x<1$ 时，函数 $f(2-x)$ 单调递增，只有 A 符合. 故选 A.

5. B　由经过 6 小时培养该细菌数量为 $\dfrac{24\sqrt{e}}{e}$（单位），得 $Y(6)=e^{-\frac{6}{12}}\cdot N_0=\dfrac{24\sqrt{e}}{e}$，解得 $N_0=24$，从而 $Y(t)=24e^{-\frac{t}{12}}$，所以 $Y(12)=24\times e^{-\frac{12}{12}}=24e^{-1}$. 故选 B.

6. A　因为 $3^x=4^y=10$，则 $x=\log_3 10>\log_3 9=2$；$1=\log_4 4<y=\log_4 10<\log_4 16=2$，则 $1<y<2$，所以 $x>y>1$，从而 $z=\log_x y<\log_x x=1$，所以 $x>y>z$. 故选 A.

7. C　$f(x)=|xe^x|=\begin{cases}xe^x, x\geqslant0,\\-xe^x, x<0.\end{cases}$ 当 $x\geqslant0$ 时，因为 $f'(x)=e^x+xe^x=e^x(x+1)>0$，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是增函数，且 $f(1)=e>\dfrac{1}{e}$，$f(0)=0$. 当 $x<0$ 时，$f'(x)=-e^x-xe^x=-e^x(x+1)$，所以当 $x<-1$ 时，$f'(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时，$f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)$ 上单调递增，在 $(-1,0)$ 上单调递减，于是当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 取得极大值 $f(-1)=\dfrac{1}{e}$. 因此当 $x<0$ 时，$0<f(x)\leqslant\dfrac{1}{e}$. 令 $f(x)=m$，又 $f(x)\geqslant0$，$f(0)=0$，所以当 $m<0$ 时，方程 $f(x)=m$ 无解；当 $m=0$ 或 $m>\dfrac{1}{e}$ 时，方程 $f(x)=m$ 有唯一解；当 $m=\dfrac{1}{e}$ 时，方程 $f(x)=m$ 有两解；当 $0<m<\dfrac{1}{e}$ 时，方程 $f(x)=m$ 有三解. 因为方程 $g(x)=-2$ 有 4 个不同的实根，即 $[f(x)]^2-tf(x)+2=0$ 有 4 个不同的实根，所以关于 m 的方程 $m^2-tm+2=0$ 在 $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$ 和 $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ 上各有一解. 所以 $\dfrac{1}{e^2}-\dfrac{t}{e}+2<0$，解得 $t>\dfrac{1}{e}+2e$. 故选 C.

8. D　设 $g(x)=f(x^2)-8\lambda f(x)=x^2-\dfrac{1}{x^2}-2\ln x^2-8\lambda\left(x-\dfrac{1}{x}-2\ln x\right)$，$x\in(1,+\infty)$，则 $g'(x)=2x+\dfrac{2}{x^3}-\dfrac{4}{x}-8\lambda\left(1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\right)=\dfrac{2(x-1)^2[x^2+(2-4\lambda)x+1]}{x^3}$. 令 $\varphi(x)=x^2+(2-4\lambda)x+1$，其图象为开口向上、对称轴为直线 $x=2\lambda-1$ 的抛物线. ①当 $2\lambda-1\leqslant1$，即 $\lambda\leqslant1$ 时，$\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，且 $\varphi(x)>\varphi(1)=4-4\lambda\geqslant0$，所以 $g'(x)>0$ 在 $(1,+\infty)$ 上恒成立，于是 $g(x)>g(1)=0$ 恒成立；②当 $2\lambda-1>1$，即 $\lambda>1$ 时，因为 $(2-4\lambda)^2-4=16\lambda^2-16\lambda>0$ 且 $\varphi(1)=4-4\lambda<0$，所以存在 $x_0\in(1,+\infty)$，使得 $x\in(1,x_0)$ 时，$\varphi(x)<0$，所以 $g'(x)<0$ 在 $(1,x_0)$ 上恒成立，即 $g(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，所以 $g(x)<g(1)=0$，不满足题意. 综上，实数 λ 的取值范围是 $(-\infty,1]$. 故选 D.

9. BCD　因为 $f(x)-12<4x$，所以 $f(x)-4x-12<0$. 令 $g(x)=f(x)-4x-12$，则 $g'(x)=f'(x)-4$. 又因为 $f'(x)>4$，所以 $g'(x)>0$. 故函数 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. 又因为 $f(-3)=0$，所以 $g(-3)=f(-3)-4\times(-3)-12=0$，所以不等式 $g(x)<0$ 的解集是 $(-\infty,-3)$. 即不等式 $f(x)-12<4x$ 的解集为 $(-\infty,-3)$. 因为 $f'(x)>4>0$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立，所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上单调递增. 又因为 $f(-3)=0$，所以 $f(0)>0$；当 $x>0$ 时，$f(x)>0$；当 $x<-3$ 时，$f(x)<0$. 故选 BCD.

10. AB　对于 A，因为 $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\left(\frac{1}{3}\right)^x}=\left(\dfrac{3}{2}\right)^x>\left(\dfrac{3}{2}\right)^0=1$，所以 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 对 $\forall x\in(0,+\infty)$ 恒成立，故 A 正确；对于 B，因为 $\log_x\dfrac{1}{2}-\log_x\dfrac{1}{3}=\log_x\dfrac{3}{2}<\log_x 1=0$，所以 $\log_x\dfrac{1}{2}<\log_x\dfrac{1}{3}$，所以 $\log_{\frac{1}{2}}x>\log_{\frac{1}{3}}x$ 对 $\forall x\in(0,1)$ 恒成立，故 B 正确；对于 C，因为 $\dfrac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{1}{6}}$，当 $x\in(0,1)$ 时，$x^{\frac{1}{6}}<1$，所以 $x^{\frac{1}{2}}<x^{\frac{1}{3}}$，故 C 错误；对于 D，当 $x\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ 时 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x-\log_{\frac{1}{2}}x<\left(\dfrac{1}{2}\right)^0-\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{2}=0$，即 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x<\log_{\frac{1}{2}}x$，故 D 错误. 故选 AB.

11. BD　对于 A，$y=\sqrt{x-1}-\sqrt{x-3}=\dfrac{2}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x-3}}$，显然该函数在 $[3,+\infty)$ 上单调递减，所以 $0<y\leqslant\sqrt{2}$，故 A 错误；对于 B，$y=\sqrt{x}+\sqrt{4-x}\leqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}=2\sqrt{2}$，当且仅当 $x=2$ 时取等号，故 B 正确；对于 C，$y=\lg(x^2-2x-3)$ 的单调递增区间为 $(3,+\infty)$，故 C 错误；对于 D，函数表示点 $(\cos x,-\sin x)$ 与 $(2,0)$ 连线斜率，因为点 $(\cos x,-\sin x)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，故 y 的最小值为 $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，故 D 正确. 故选 BD.

12. BD　$f(x)=\cos x[\ln(2\pi-x)+\ln x]=\cos x\ln(-x^2+2\pi x)=\cos x\ln[-(x-\pi)^2+\pi^2]$，$f(2\pi-x)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\pi$ 对称，故 A 错误，B

正确；$f(x)$的定义域为$(0,2\pi)$，$f(x+\pi)$的定义域为$(-\pi,\pi)$，$g(x)=f(\pi+x)=\cos(\pi+x)[\ln(\pi-x)+\ln(\pi+x)]=-\cos x\ln(\pi^2-x^2)$为偶函数，故C错误；当$x\in(0,2\pi)$时，由$f(x)=0$，得$\cos x=0$，或$\ln(2\pi-x)+\ln x=0$。由$\cos x=0$，解得$x_1=\frac{\pi}{2}$，或$x_2=\frac{3}{2}\pi$；由$\ln(2\pi-x)+\ln x=0$，得$-x^2+2\pi x=1$，解得$x_3=\pi-\sqrt{\pi^2-1}\in(0,2\pi)$，$x_4=\pi+\sqrt{\pi^2-1}\in(0,2\pi)$。综上，$f(x)$有4个零点，故D正确。故选BD。

13. -4　$f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right)=f\left(\log_4\frac{1}{4}\right)=f(-1)=-4$.

14. -1　由已知必有$m^2-m=3+m$，即$m^2-2m-3=0$，$\therefore m=3$，或$m=-1$。当$m=3$时，函数即$f(x)=x^{-1}$，而$x\in[-6,6]$，$\therefore f(x)$在$x=0$处无意义，故舍去；当$m=-1$时，函数即$f(x)=x^3$，此时$x\in[-2,2]$，$\therefore f(m)=f(-1)=(-1)^3=-1$。综上，$f(m)=-1$。

15. $y=5x+2$　设$f(x)=\frac{2x-1}{x+2}$，则$f'(x)=\frac{5}{(x+2)^2}$，$f'(-1)=5$，所以切线方程为$y+3=5(x+1)$即$y=5x+2$.

16. 0　法一：因为$f(2x-1)$是偶函数，所以$f(-2x-1)=f(2x-1)$，所以$f(-x-1)=f(x-1)$，即$f(-2-x)=f(x)$，则$f(x)$的图象关于直线$x=-1$对称；因为$f(x-2)$是奇函数，所以$f(x-2)=-f(-x-2)$，所以$f(x)$的图象关于点$(-2,0)$对称，易知$f(x-2)=-f(-x-2)=-f(x)$，所以$f(x)$是周期函数，且4是$f(x)$的一个周期；由$f(x-2)=-f(-x-2)=-f(4-x-2)=-f(2-x)$，得$f(x)=-f(-x)$，所以$f(x)$为奇函数；在$f(x-2)=f(-x)$中，令$x=-1$，得$f(-3)=f(1)=-f(3)$，所以$f(1)+f(3)=0$；在$f(x-2)=f(-x)$中，令$x=-2$，得$f(-4)=f(2)=-f(4)$，所以$f(2)+f(4)=0$，从而$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=0$，所以$\sum_{i=0}^{16}f(i)=f(0)+4[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$.

法二：取$f(x)=\sin\frac{\pi}{2}x$，定义域为$\mathbf{R}$，则$f(x-2)=\sin\frac{\pi}{2}(x-2)=-\sin\frac{\pi}{2}x$为奇函数，$f(2x-1)=\sin\frac{\pi}{2}(2x-1)=-\cos\pi x$为偶函数。$f(x)$符合所有条件，且是以4为周期的周期函数，$f(0)=0$，$f(1)+f(2)+f(3)+f(4)=1+0+(-1)+0=0$，所以$\sum_{i=0}^{16}f(i)=f(0)+4[f(1)+f(2)+f(3)+f(4)]=0$.

17. 解：(1)$\because f(x)$图象关于原点对称，$\therefore f(x)$是奇函数，

$\therefore f(-x)+f(x)=0$恒成立，即$\frac{1+mx}{-x-1}\times\frac{1-mx}{x-1}=1$，

即$\frac{1-m^2x^2}{1-x^2}=1$，$\therefore m=1$或$m=-1$. ………………………………… 3分

当$m=1$时$f(x)$的真数为-1，无意义，舍去，

$\therefore m=-1$. ………………………………………………………………… 4分

(2)$f(x)=\log a\frac{x+1}{x-1}$，

当$a>1$时，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减； ………………………… 5分

当$0<a<1$时，$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增. ………………………… 6分

证明：设$1<x_1<x_2$，则

$\frac{x_1+1}{x_1-1}-\frac{x_2+1}{x_2-1}=\frac{2(x_2-x_1)}{(x_1-1)(x_2-1)}>0$，

$\therefore\frac{x_1+1}{x_1-1}>\frac{x_2+1}{x_2-1}>0$. ………………………………………… 8分

当$a>1$时，$\log_a\frac{x_1+1}{x_1-1}>\log_a\frac{x_2+1}{x_2-1}$，即$f(x_1)>f(x_2)$，$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减. ……………………………………………………………… 9分

当$0<a<1$时，$\log_a\frac{x_1+1}{x_1-1}<\log_a\frac{x_2+1}{x_2-1}$，即$f(x_1)<f(x_2)$，

$\therefore f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递增. ………………………………………… 10分

18. 解：(1)由函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的偶函数，得$f(x)=f(-x)$恒成立，

则$\log_4(4^x+1)+ax=\log_4(4^{-x}+1)-ax$，

$\therefore 2ax=\log_4\frac{4^{-x}+1}{4^x+1}=\log_4\frac{1}{4^x}=-x$， ………………………… 2分

$\therefore(2a+1)x=0$恒成立，则$2a+1=0$，故$a=-\frac{1}{2}$. …………………… 4分

(2)$f(x)+f(-x)=\log_4(4^x+1)+ax+\log_4(4^{-x}+1)-ax$

$=\log_4(4^x+1)+\log_4(4^{-x}+1)=\log_4(4^x+1)(4^{-x}+1)$

$=\log_4(2+4^x+4^{-x})\geqslant\log_4(2+2\sqrt{4^x\times4^{-x}})=1$.

当且仅当$x=0$时取等号， ………………………………………………… 8分

$\therefore mt+m\leqslant1$对任意$t\in[-2,1]$恒成立， ………………………………… 9分

令$h(t)=mt+m$，

由$\begin{cases}h(-2)=-2m+m\leqslant1,\\h(1)=m+m\leqslant1,\end{cases}$解得$-1\leqslant m\leqslant\frac{1}{2}$， ……………………… 11分

故实数m的取值范围是$\left[-1,\frac{1}{2}\right]$. ………………………………… 12分

19. 解：(1)$f(x)=x+f'(0)\cos 2x+a(a\in\mathbf{R})$，则$f'(x)=1-2f'(0)\sin 2x$，

得$f'(0)=1$. ……………………………………………………………… 4分

由题意$f(0)=2$，可得曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$y-2=x$，即$x-y+2=0$. ………………………………………………………… 6分

(2)由已知得$f(0)=f'(0)+a=2$.

又由(1)知$f'(0)=1$，所以$a=1$.

故$f(x)=x+\cos 2x+1$. ……………………………………………………… 8分

$f'(x)=1-2\sin 2x$，$x\in[0,\pi]$，

由$f'(x)>0$，得$0\leqslant x<\frac{\pi}{12}$，或$\frac{5\pi}{12}<x\leqslant\pi$；由$f'(x)<0$，得$\frac{\pi}{12}<x<\frac{5\pi}{12}$.

………………………………………………………………………… 11分

故$f(x)$在$[0,\pi]$上的单调递增区间为$\left[0,\frac{\pi}{12}\right)$和$\left(\frac{5\pi}{12},\pi\right]$；单调递减区间为$\left(\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}\right)$. …………………………………………………………… 12分

注：考生的答案为闭区间时也正确.