

2024 届全国名校高三单元检测示范卷 · 数学(五)

函数的综合应用

(本卷满分:150 分)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 函数 $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{1-2^x}}$ 的定义域是

- A. $(-3, 0)$ B. $(-3, 0]$
C. $(-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$ D. $(-\infty, -3) \cup (-3, 0)$

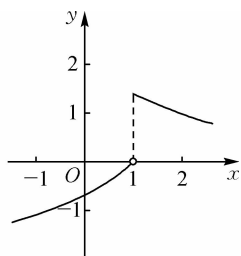
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{x}, & x < 2, \\ x^2 - 7, & x \geq 2, \end{cases}$ 若 $f(a) = 2$, 则实数 a 的值为

- A. 1 B. 1 或 3 C. -3 D. 1 或 -3

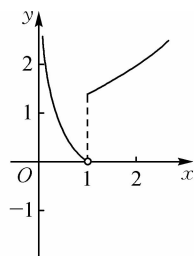
3. 函数 $f(x) = 2x - e^x$ 的单调递增区间为

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(\ln 2, +\infty)$
C. $(-\infty, \ln 2]$ D. $[0, +\infty)$

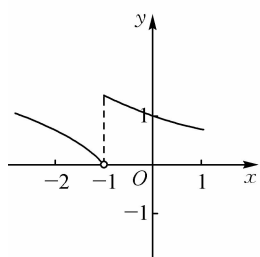
4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} (\sqrt{2})^x, & x \leq 1, \\ -\ln x, & x > 1, \end{cases}$ 则 $y = f(2-x)$ 的大致图象是



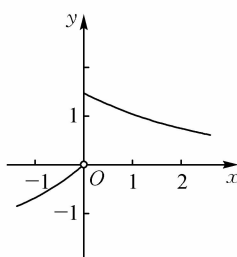
A



B



C



D

5. 在实验室细菌培养过程中,细菌生长主要经历调整期、指数期、稳定期和衰亡期四个时期.在一定条件下,某生物实验室在研究某种动物细菌的过程中发现,细菌数量 N (单位)与该动物细菌被植入培养的时间 t (单位:小时)近似满足函数关系式 $Y(t) = N_0 e^{-\frac{t}{12}}$,其中 N_0 为初始细菌含量.若经过 6 小时培养,该细菌数量为 $\frac{24\sqrt{e}}{e}$ (单位),则 $Y(12) =$

中 N_0 为初始细菌含量.若经过 6 小时培养,该细菌数量为 $\frac{24\sqrt{e}}{e}$ (单位),则 $Y(12) =$

- A. $12e^{-1}$ B. $24e^{-1}$ C. $36e^{-1}$ D. $38e^{-2}$

6. 若 $3^x = 4^y = 10, z = \log_x y$, 则

- A. $x > y > z$ B. $y > x > z$ C. $z > x > y$ D. $x > z > y$

7. 已知 $f(x) = |xe^x|, g(x) = (f(x))^2 - tf(x) (t \in \mathbf{R})$, 若关于 x 的方程 $g(x) = -2$ 有四个不同的实数根, 则 t 的取值范围为

- A. $(-\infty, -\frac{1}{e} - 2e)$ B. $(-\infty, \frac{1}{e} - e)$
C. $(\frac{1}{e} + 2e, +\infty)$ D. $(\frac{1}{e} + e, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = x - \frac{1}{x} - 2\ln x$, 当 $x > 1$ 时, $f(x^2) > 8\lambda f(x)$ 恒成立, 则实数 λ 的取值范围为

- A. $(-\infty, -2]$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(-\infty, -1]$ D. $(-\infty, 1]$

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

9. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 若 $f'(x) > 4$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立, $f(-3) = 0$, 则下列说法正确的有

- A. $f(0) = 0$
B. 当 $x < -3$ 时, $f(x) < 0$
C. 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$
D. 关于 x 的不等式 $f(x) - 12 < 4x$ 的解集为 $(-\infty, -3)$

10. 下列命题正确的是

- A. $\forall x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x$
- B. $\forall x \in (0, 1), \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$
- C. $\exists x \in (0, 1), x^{\frac{1}{2}} > x^{\frac{1}{3}}$
- D. $\exists x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} x$

11. 下列说法正确的是

- A. $y = \sqrt{x-1} - \sqrt{x-3}$ 的值域为 $(-\infty, \sqrt{2}]$
- B. $y = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$ 的最大值为 $2\sqrt{2}$
- C. $y = \lg(x^2 - 2x - 3)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$
- D. 函数 $y = \frac{\sin x}{2 - \cos x}$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

12. 已知函数 $f(x) = \cos x [\ln(2\pi - x) + \ln x]$, 则

- A. $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称
- B. $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称
- C. $f(\pi + x)$ 是奇函数
- D. $f(x)$ 有 4 个零点

选择题答题栏

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

三、填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4x, & x \leq 0, \\ \log_4 x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f\left(f\left(\frac{1}{4}\right)\right) =$ _____.
14. 已知函数 $f(x) = x^{2-m}$ 是定义在区间 $[-3-m, m^2-m]$ 上的奇函数, 则 $f(m) =$ _____.
15. 曲线 $y = \frac{2x-1}{x+2}$ 在点 $(-1, -3)$ 处的切线方程为 _____.
16. 已知 $f(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数, $f(x-2)$ 为奇函数, $f(2x-1)$ 为偶函数, 则 $\sum_{i=0}^{16} f(i) =$ _____.

四、解答题(本题共 6 小题, 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \log_a \frac{1-mx}{x-1}$ ($a > 0$, 且 $a \neq 1$) 的图象关于原点对称.

- (1) 求 m 的值;
- (2) 判断 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上的单调性, 并利用定义证明.

18. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \log_4(4^x + 1) + ax$ ($a \in \mathbf{R}$).

- (1) 若函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 求 a 的值;
- (2) 若不等式 $f(x) + f(-x) \geq mt + m$ 对任意 $x \in \mathbf{R}, t \in [-2, 1]$ 恒成立, 求实数 m 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 已知 $f(x) = x + f'(0) \cos 2x + a$ ($a \in \mathbf{R}$), 且 $f(x)$ 的图象经过点 $(0, 2)$.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 求函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上的单调区间.

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f(\lg x) = x + \frac{1}{x} + 2$.

(1) 判断 $f(x)$ 的奇偶性及 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的单调性, 并分别用定义进行证明;

(2) 若对 $\forall x \in [-1, 1], af(x) \leq f(2x) + 4a$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = x^2 + ax + a$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求函数 $g(x) = e^x f(x)$ 的极值;

(2) 若 $f(\ln x) + \frac{2e^2}{x} \geq 0$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知 $a \geq 0$, 函数 $f(x) = ax + \frac{1+a}{x} - \ln x$.

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2) 如果我们用 $n - m$ 表示区间 (m, n) 的长度, 试证明: 对任意实数 $a \geq 1$, 关于 x 的不等式 $f(x) < 2a + 1$ 的解集的区间长度小于 $2a + 1$.