

2023 年全国高考模拟试卷(样)

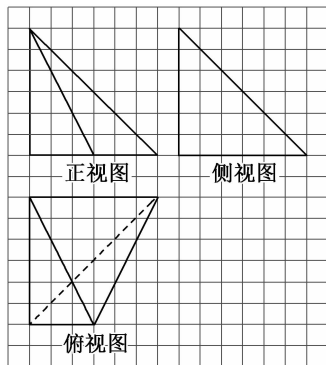
理科数学

注意事项:

1. 本卷满分 150 分,考试时间 120 分钟。答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 选考题的作答:先把所选题目的题号在答题卡上指定的位置用 2B 铅笔涂黑。答案写在答题卡上对应的答题区域内,写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
5. 考试结束后,请将本试题卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 复数 $z = \frac{3-4i}{2+i}$ (i 是虚数单位)在复平面内对应的点位于
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知集合 $A = \{x | 2x^2 - 5x - 3 < 0\}$, $B = \{x | 2^x < \log_2 4\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbb{R}} B) =$
A. $\left\{x \mid -3 < x < \frac{1}{2}\right\}$ B. $\{x | 1 \leq x < 3\}$ C. $\{x | 2 < x < 3\}$ D. $\left\{x \mid -\frac{1}{2} < x < 3\right\}$
3. 已知命题 $p: \exists x_0 \in (0, \pi), \sin x_0 < 0$, 命题 $q: \forall x > 1, \log_2 x > 0$, 则下列命题为真命题的是
A. $p \wedge q$ B. $p \vee \neg q$ C. $\neg(p \vee q)$ D. $\neg p \wedge q$
4. 某几何体的三视图如图所示(图中小正方形的边长为 1), 则该几何体的体积为
A. 6
B. 9
C. 18
D. 36
5. 2021 年元旦期间,某高速公路收费站的四个高速收费口每天通过的小汽车数 $X_i (i=1, 2, 3, 4)$ (单位:辆)均服从正态分布 $N(600, \sigma^2)$, 若 $P(500 < X_i < 700) = \frac{1}{3} (i=1, 2, 3, 4)$, 假设四个收费口均能正常工作, 则这四个收费口每天至少有一个不低于 700 辆小汽车通过的概率为
A. $\frac{8}{9}$ B. $\frac{8}{27}$ C. $\frac{16}{27}$ D. $\frac{65}{81}$
6. 已知角 $\alpha + \frac{9}{4}\pi$ 的终边经过点 $(-2, 4)$, 则 $3\sin^2 \alpha - \sin(\pi + \alpha)\cos \alpha =$
A. -4 B. -2 C. 3 D. 9



7. 在三棱锥 $P-ABC$ 中, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AB=BC=2$, $PC=AC$, 且 $PC \perp$ 平面 ABC , 则三棱锥的外接球的表面积为

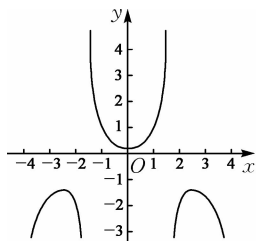
A. 16π

B. 8π

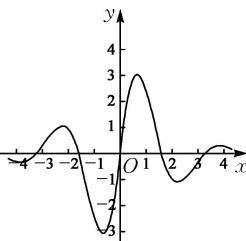
C. $\frac{4}{3}\pi$

D. $\frac{32}{3}\pi$

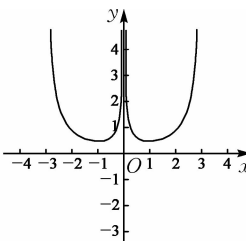
8. 函数 $f(x) = \frac{5\sin|x|}{2^{|x|}}$ 的部分图象大致为



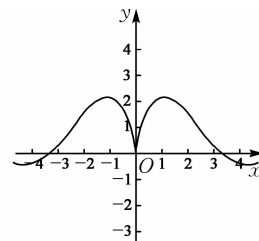
A



B



C



D

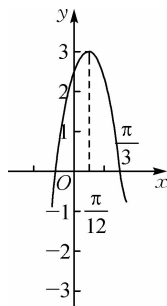
9. 已知函数 $f(x) = 3\cos(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象如图, 将 $f(x)$ 的图象上各点向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)$ 的图象, 则

A. $g(x)$ 在区间 $[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增

B. $g(x)$ 的图象的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

C. $g(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3}, 0)$ 对称

D. $g(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称



10. 已知偶函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 若 $a = f(e^{0.6})$, $b = f(\ln 2)$, $c = f(\log_{0.5} e)$, 则 a, b, c 的大小关系是 (参考数据: $\sqrt{2} \approx 1.414, e \approx 2.71828$)

A. $a < b < c$

B. $b < c < a$

C. $c < b < a$

D. $b < a < c$

11. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的左、右焦点, C 的离心率为圆 $4x^2 + 4y^2 - 8x + 1 = 0$ 的半径, A 为 C 上一点, 满足 $\angle F_1AF_2 = 60^\circ$, $\triangle F_1AF_2$ 的面积为 $\frac{8\sqrt{3}}{3}$, 则以 C 的

顶点为顶点的四边形的面积为

A. 16

B. 18

C. 32

D. 48

12. 已知 $f(x) = \frac{ax}{x+1} + \ln(x+1)$, 则下列说法正确的是

A. 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 有极大值点和极小值点

B. 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 无极大值点和极小值点

C. 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 有最大值

D. 当 $a < 0$ 时, $f(x)$ 的最小值小于或等于 0

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2, E 是 BC 的中点, 则 $\vec{AE} \cdot \vec{ED} =$ _____.

14. 已知实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} 3x+2y-6 \leq 0, \\ x-3y+3 \geq 0, \\ x+3y \geq 0, \end{cases}$ 则目标函数 $z = \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+y}$ 的最大值为 _____.

15. 已知锐角 $\triangle ABC$ 的面积为9, $AB=AC$, 点 D 在边 AC 上, 且 $CD=2DA=\sqrt{10}$, 则 BD 的长为_____.

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - y^2 = 1 (a > 0)$ 的左顶点为 M , 点 $N(0, 1)$, 双曲线 C 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 为线段 MN 上异于 M 的动点, 当 $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$ 取得最小值和最大值时, $\triangle PF_1F_2$ 的面积分别为 S_1, S_2 , 若 $S_2 = 2S_1$, 则双曲线 C 的离心率为_____.

三、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题, 考生根据要求作答。

(一) 必考题: 共 60 分。

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n + n = 3n^2$.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;

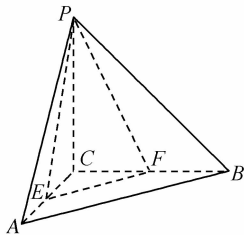
(2) 若 $b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \cdot a_n$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (本小题满分 12 分)

如图, 三棱锥 $P-ABC$ 中, AC, BC, PC 两两垂直, $AC=BC$, E, F 分别是棱 AC, BC 的中点, $\triangle ABC$ 的面积为8, 四棱锥 $P-ABFE$ 的体积为4.

(1) 若平面 $PEF \cap$ 平面 $PAB = l$, 证明: $EF \parallel l$;

(2) 求二面角 $B-PF-E$ 的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

为了解社区居民的业余活动, 某社区对 100 名居民业余活动是参加文艺活动还是参加体育活动进行问卷调查, 数据如下表所示:

	文艺活动	体育活动
男性	10	40
女性	30	20

(1) 是否有 99.9% 的把握认为参加文艺活动还是体育活动与性别有关?

(2) 用频率估计概率, 从社区全体居民中随机抽取 3 人, 记 X 是所抽 3 人中参加文艺活动的人数, 求随机变量 X 的分布列与期望 $E(X)$.

附:

$P(K^2 \geq k)$	0.025	0.010	0.005	0.001
k	5.024	6.635	7.879	10.828

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}.$$

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 的直线与抛物线 C 交于 A, B 两点, 当 A, B 两点的纵坐标相同时, $|AB| = 4$.

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若 P, Q 为抛物线 C 上两个动点, $|PQ| = m (m > 0)$, E 为 PQ 的中点, 求点 E 纵坐标的最小值.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \ln x - 2x - \frac{1}{x} + a$ (a 为常数).

(1) 若 $f(x)$ 的极大值是 3, 求 a 的值;

(2) 当 $a = \ln 2$ 时, 对任意 $x > 0$, $f(x) < \frac{k}{e^x} - x - \frac{1}{x} (k \in \mathbf{Z})$ 恒成立, 求整数 k 的最小值.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 两题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

已知平面直角坐标系 xOy , 曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = \cos \varphi, \\ y = -3 + \sin \varphi \end{cases}$ (φ 为参数), 以 O 为极点, x 轴

的正半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $2\rho \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2\rho \sin \theta = 7 + \rho$.

(1) 求曲线 C 的普通方程;

(2) 若 Q 为曲线 C 上的动点, M 为 OQ 的中点, 求点 M 到直线 l 的距离的最小值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知 $f(x) = 2|x-1| + |x+4|$.

(1) 解不等式 $f(x) \leq 2 + 3x$;

(2) 若 $\forall x \in \mathbf{R}$, 关于 x 的不等式 $f(x) - 3|x+4| \leq 2m^2 - m$ 成立, 求实数 m 的取值范围.