

2023 届全国高考分科综合卷(样)

数 学

注意事项:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必将密封线内的项目填写清楚。
3. 请将选择题答案填在非选择题前面的答题表中;非选择题用黑色墨水签字笔答题。

题号	一	二	三						总分	合分人	复分人
			17	18	19	20	21	22			
得分											

得分	评卷人

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | x < 2 \text{ 或 } x \geq 4\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B \neq \emptyset$, 则 a 的取值范围是
A. $a < 2$ B. $a > 2$
C. $a \leq 4$ D. $a \geq 4$
2. 已知复数 z 满足 $i^{2k+1}z = 2 + (-1)^k i (k \in \mathbb{Z})$, 则 z 在复平面内对应的点可能位于
A. 第一或第二象限 B. 第一或第四象限
C. 第二或第三象限 D. 第三或第四象限
3. 已知角 α 终边经过点 $P(-3, 2)$, 则 $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) =$
A. $\frac{2\sqrt{13}}{13}$ B. $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ D. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$
4. 若双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线过点 $(2m, 4m) (m \neq 0)$, 则双曲线 C 的离心率为
A. $\sqrt{3}$ B. 2 C. $\sqrt{5}$ D. 4
5. 已知空间中的两条直线 m, n 及平面 α , 则“ $m \perp \alpha, n \perp \alpha$ ”是“ $m \parallel n$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 已知 P 为抛物线 $C: y^2 = 16x$ 上的一点, P 到 C 的焦点距离与到 y 轴距离之和为 16, 则 P 点的横坐标为
A. 2 B. 4
C. 6 D. 8
7. 若点 $P(-2, -1)$ 为圆 $x^2 + y^2 = 9$ 的弦 AB 的一个三等分点, 则弦 AB 的长度为
A. $3\sqrt{2}$ B. 4 C. $2\sqrt{6}$ D. $2\sqrt{5}$

8. 将函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的图象向右平移 $m(m > 0)$ 个单位长度, 再将图象上各点的横坐标伸长到原来的 2 倍(纵坐标不变), 得到函数 $g(x)$ 的图象, 若对任意的 $x \in \mathbf{R}$ 均有 $g(x) \geq g\left(\frac{\pi}{6}\right)$ 成立, 则 m 的最小值为

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{\pi}{6}$ D. $\frac{\pi}{4}$

9. $(x-2y)(x+y)^6$ 的展开式中 x^3y^4 的系数为

- A. 25 B. -25 C. 15 D. -15

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $S_n = 1 - \frac{1}{2}a_n$, 设 $T_n = a_1a_2 \cdots a_n$, $b_n = \frac{1}{\sqrt[n]{T_n}}$, 则 $3a_n + \sqrt{3}b_n$ 的最小值为

- A. $2\sqrt{3}$ B. $\frac{9}{2}$
C. $2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{31}{6}$

11. 过点 $P(1, 2)$ 作曲线 $C: y = \frac{4}{x}$ 的两条切线, 切点分别为 A, B , 则直线 AB 的方程为

- A. $2x + y - 8 = 0$ B. $x + 2y - 8 = 0$
C. $2x + y - 4 = 0$ D. $x + 2y - 4 = 0$

12. 正实数 a, b, c 满足 $a + \sin a = 2, b + 3^b = 3, c + \log_4 c = 4$, 则 a, b, c 之间的大小关系为

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$
C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

(请将选择题每题答案填在下表中)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

得分	评卷人

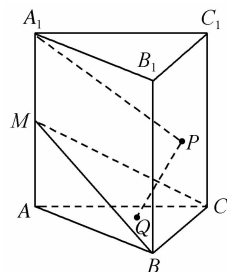
二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知向量 $\mathbf{a} = (x, -6), \mathbf{b} = (3, 4)$, 则当 $|\mathbf{a}| = 2|\mathbf{b}|$ 时, $x =$ _____.

14. 已知正实数 a, b 满足 $a + 2b = 1, x = 1 + \frac{1}{a}, y = 2 + \frac{1}{b}$, 则 $x + y$ 的最小值为 _____, xy 的最小值为 _____.

15. 已知 $f(\alpha) = \frac{2\sin \alpha \cos \alpha - 2}{\sin \alpha + \cos \alpha + 1} \left(0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}\right)$, 则 $f(\alpha)$ 的最大值为 _____.

16. 如图, 在棱长均为 2 的正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 点 M 是侧棱 AA_1 的中点, 点 P, Q 分别是侧面 BCC_1B_1 和底面 ABC 内的动点, 且 $A_1P \parallel$ 平面 $BCM, PQ \perp$ 平面 BCM , 则点 Q 的轨迹的长度为 _____.



得分	评卷人

三、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算

步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AC=2\sqrt{2}$, $\tan C=\frac{\sqrt{7}}{7}$, D 为 BC 边上一点,且 $CD=\sqrt{7}-2$.

- (1)求 AD ;
(2)若 $AB=\sqrt{2}$,求角 B 的大小.

18. (本小题满分 12 分)

由于生活方式的改变,颈椎病不再是老年人的专属,越来越多的年轻人患上了颈椎病. 现在的通讯设备发达,常常可以看到一群人在走路时、在吃饭时、在乘车时低着头玩手机,长期下来,就很容易使颈椎损伤,患上颈椎病. 手机和颈椎病可以说是形影不离.

某研究型学习小组调查研究“长期使用智能手机对颈椎病的影响”,对 100 名手机党调查得到部分统计数据如下表,规定:日使用手机时间超过 4 小时为频繁使用手机,已知频繁使用手机的人数比非频繁使用手机的人数少 24 人.

	非频繁使用手机	频繁使用手机	合计
颈椎病人数	8	a	
非颈椎病人数	b	16	
合计			100

- (1)求表中 a, b 的值,并补全表中所缺数据;
(2)运用独立性检验思想,判断是否有 99.9% 的把握认为频繁使用手机对颈椎病有影响?

附: $K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$,其中 $n=a+b+c+d$.

$P(K^2\geq k_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005	0.001
k_0	2.706	3.841	6.635	7.879	10.828

19. (本小题满分 12 分)

定义给定数列 $\{b_n\}$, 若对任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$ 且 $m \neq n$, $b_m + b_n$ 也是 $\{b_n\}$ 中的项, 则称 $\{b_n\}$ 为“ H 数列”.

(1) 请写出一个数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 _____, 此时数列 $\{a_n\}$ 是“ H 数列”;

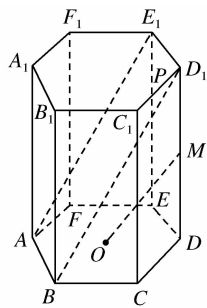
(2) 设 $\{a_n\}$ 既是等差数列又是“ H 数列”, 且 $a_1 = 6, a_2 \in \mathbf{N}^*, a_2 > 6$, 求公差 d 的所有可能值.

20. (本小题满分 12 分)

如图, 在正六棱柱 $ABCDEF - A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 中, $AB = 2, AA_1 = 4, M$ 为侧棱 DD_1 的中点, P 为棱 C_1D_1 上一点, O 为下底面 $ABCDEF$ 的中心.

(1) 求证: $MO \parallel$ 平面 ABD_1E_1 ;

(2) 求直线 AP 与平面 A_1CDF_1 所成角正弦值的取值范围.



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的右焦点为 $F(1, 0)$, 点 $P\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 在 C 上, c 为椭圆 C 的半焦距.

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 若经过 F 的直线 l 与 C 交于 A, B (异于 P) 两点, 与直线 $x = \frac{a^2}{c}$ 交于点 M , 设 PA, PB, PM 的斜率分别为 k_1, k_2, k_3 , 求证: $k_1 + k_2 = 2k_3$.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = ae^x - 4x (a \in \mathbf{R})$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 当 $a=1$ 时, 求证: $f(x) + x^2 + 1 > 0$.