

# 2023 新高考题型专练 · 重点题型卷

## 数学(二) “保 4 争 2”

### “保 4 题”试题部分

17. (10 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 $A, B, C$ 的对边分别为 $a, b, c$ ,  $2a \cos B = 2c + b$ .

(1) 求 $A$ ;

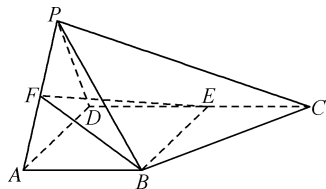
(2) 若 $a=4, b+c=3\sqrt{2}$ , 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (12 分)

如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中,  $AB \parallel CD$ ,  $AB \perp AD$ ,  $AD = AB = \frac{1}{2}CD = 2$ ,  $\triangle PAD$ 为等边三角形, 点 $E, F$ 分别为 $CD, AP$ 的中点.

(1) 证明:  $PC \parallel$  平面  $BEF$ ;

(2) 若  $PB = 2\sqrt{2}$ , 求二面角  $P-BF-E$  的余弦值.



19. (12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  满足  $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \cdots + \frac{a_n}{2^n} = n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$ .

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若  $b_n = \frac{a_n}{4^n}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $S_n$ .

20. (12 分)

新高考的数学试卷第 1 至第 8 题为单选题, 第 9 至第 12 题为多选题. 多选题  $A, B, C, D$  四个选项中至少有两个选项符合题意, 其评分标准如下: 全部选对得 5 分, 部分选对得 2 分, 选错或不选得 0 分. 在某次考试中, 第 11、12 两题的难度较大, 第 11 题正确选项为  $AD$ , 第 12 题正确选项为  $ABD$ . 甲同学由于考前准备不足, 答题时只能对这两道题的选项进行随机选取, 每个选项是否被选到是等可能的.

(1) 若甲同学每题均随机选取一项, 求甲同学第 11、12 两题得分合计为 4 分的概率;

(2) 若甲同学计划第 11 题随机选取两项, 第 12 题随机选取三项, 记甲同学的两题得分之和为  $X$ , 求  $X$  的分布列和数学期望.

## “争 2 题”试题部分

21. (12 分)

已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左、右焦点为  $F_1, F_2$ ,  $P(\sqrt{3}, \sqrt{6})$  为  $C$  上一点,  $|PF_1| - |PF_2| = 2$ , 过点  $F_2$  的直线  $l$  交双曲线于  $A, B$  两点.

(1) 求双曲线  $C$  的方程;

(2) 在  $x$  轴上是否存在点  $M(m, 0)$ , 使得  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$  恒成立? 若存在, 求出  $M$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

22. (12 分)

已知函数  $f(x) = ae^x - x (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x)$  有两个零点  $x_1, x_2$ , 证明:  $x_1 x_2 > a^2 e^2$ .