

2023 高考题型专练·走进大题卷

数学(九) 解析几何(1)

1. (12 分)

已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的焦距为 $2\sqrt{3}$, 其长轴长是短轴长的 2 倍.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 点 $P(0, 1)$, 过点 $(1, -1)$ 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B (异于点 P) 两点, 证明: 直线 PA 与直线 PB 的斜率之和为定值.

2. (12 分)

已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线方程为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x$, 点 $(2\sqrt{3}, 1)$ 在双曲线上,

抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点 F 与双曲线的右焦点重合.

(1) 求双曲线和抛物线的标准方程;

(2) 过点 F 作互相垂直的直线 l_1, l_2 , 设 l_1 与抛物线的交点为 A, B , l_2 与抛物线的交点为 D, E , 求 $|AB| + |DE|$ 的最小值.

3. (12 分)

设点 F_1, F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{2} = 1 (a > 0)$ 的左、右焦点, $|F_1 F_2| = 2$.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 过右焦点 F_2 的直线 l 与椭圆 C 交于 A, B 两点, 线段 AB 的垂直平分线交直线 l 于点 P ,

交直线 $x = -\frac{3}{2}$ 于点 Q , 求 $\frac{|PQ|}{|AB|}$ 的最小值.

4. (12 分)

已知抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点为 F , 过 F 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -12$ (O 为坐标原点).

(1) 求抛物线 C 的方程;

(2) 若点 P 在抛物线 C 上, 记直线 PA 的斜率为 k_1 , 直线 PB 的斜率为 k_2 , 试判断是否存在点 P , 使得 $k_1 + k_2 = 4$? 若存在, 求出点 P 的个数; 若不存在, 请说明理由.