2023 高考纠错提分卷·理科数学(二)

三角函数与解三角形、平面向量、不等式纠错补缺

本卷主要解决学生在三角函数与解三角形、平面向量、不等式中出现的问题，通过本卷对三角函数的性质、利用正余弦定理解三角形、平面向量中的概念和运算、一元二次不等式、基本不等式和线性规划中出现的常见错误问题的分析，达到避免失误，增加得分的目的.

纠错补缺提分要点

三角函数与解三角形中常见的易错考点

易错考点 1　单位圆中的三角函数线应用意识不强，易将角的三角函数值所对应的三角函数线与线段的长度二者等同起来，产生概念性的错误

辨析：利用三角函数线比较三角函数值的大小时，只注意其长度的大小而忽视三角函数线的方向.

易错考点 2　忽视正弦函数和余弦函数的有界性致误

辨析：在做题过程中，有时会忽视正弦函数和余弦函数的值域是$[-1,1]$，把值域当成是 $\mathbf{R}$ 来计算导致错误.

易错考点 3　用换元法解题时，易忽略换元前后的等价性

辨析：在做题过程中，有时会忽视自变量的取值范围，从而导致换元后变量的取值范围扩大，导致求函数的值域或单调区间错误.

易错考点 4　在三角函数的图象变换中由 $y=\sin(\omega x)$（或 $y=\sin(\omega x+\varphi)$）变到 $y=\sin(\omega x+\varphi)$（或 $y=\sin(\omega x)$）中忽视 x 的系数致误

辨析：三角函数的左右平移变换只对一个 x 而言，首先将 $y=\sin(\omega x)$（或 $y=\sin(\omega x+\varphi)$）中 x 的系数 ω 提出来，然后再进行相应的平移变换.

易错考点 5　没有挖掘题目中的隐含条件，忽视对角的范围的限制而造成增解或错解现象

辨析：在进行三角恒等变换时，没有利用题设条件将角的范围进行适当的压缩，从而在利用同角基本关系式或余弦的倍角公式开根号时出现增解问题.

易错考点 6　根据已知条件确定角的大小，没有通过确定角的三角函数值再求角的意识或确定角的三角函数名称不适当造成错解

辨析：在给值求角问题中，一般是求出该角的一个三角函数值，忽视隐含条件导致求出两个角.

易错考点 7　利用正弦定理解三角形时，若已知三角形的两边及其一边的对角解三角形时，易忽视三角形解的个数

辨析：在三角形中 $\sin A=a$ 没有指明三角形形状的前提下，应该有两个解，易忽视角 A 为钝角的情形而漏解.

易错考点 8　忽视解三角形中的隐含条件,导致范围扩大或增解

辨析:审题时没有注意到锐角三角形(或钝角三角形)的条件导致错解,有时对求解的结果忽视大边对大角的原则导致增解.

易错考点 9　解三角形与三角变换不熟练,导致不能将已知条件进行合理的转化

辨析:解三角形常和三角恒等变换结合在一起进行考查,不能利用正、余弦定理以及已知条件的结构特征进行快速准确的互化导致解题思路受阻碍.

平面向量中常见的易错考点

易错考点 1　涉及向量的有关概念、运算律的理解与应用不准确,导致产生概念性错误

辨析:向量中的平行、垂直概念忽视零向量的特殊性导致错误,把向量数量积满足的运算律与实数的乘法相混淆,错误认为满足消去律导致错误

易错考点 2　利用向量的加法、减法、数量积等运算的几何意义解题时,数形结合的意识不够,忽视隐含条件导致错误

辨析:不能将向量运算的表达式与相应的几何图形结合在一起,导致求解过程繁琐或没有解题思路而失误.

易错考点 3　忽视数量积定义中对两向量夹角的定义

辨析:对三角形中的向量进行运算时,将三角形的内角错误地认为是两个向量的夹角而导致错误,另外在向量的坐标运算过程中,两个向量的夹角为锐角或钝角,仅仅用数量积大于零或小于零表示,忽视向量共线时的情况而导致错误.

不等式中常见的易错考点

易错考点 1　应用基本不等式确定最值时,忽视应用的前提条件,特别是易忘判断不等式取得等号时的变量值是否在定义域限制范围之内

辨析:利用基本不等式求最值时,未检验是否满足一正、二定、三相等的条件而导致错误.

易错考点 2　忽视不等式最高项系数的讨论而漏解

辨析:求解不等式 $ax^2+bx+c>0(<0)$ 时,忽视对不等式最高项系数是否为零的讨论,直接认为是一元二次不等式而导致漏解.

易错考点 3　含参分式不等式的解法,对分类讨论的标准把握不准,分类讨论未做到不重不漏而导致错误

辨析:在求解含参一元二次不等式,忽视对相对应一元二次方程根的大小关系的判断和讨论导致错误.

易错考点 4　利用线性规划求最值问题时,忽视比较目标函数的斜率与区域边界的斜率导致错误.

辨析:目标函数 $z=ax+by$ 中,z 的几何意义有时是截距的相反数,忽视 z 前面正负号的判断导致错误.

纠错补缺提分精讲

◉例 1　(1)已知非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,则“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant 1,|\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}|\leqslant 2$”是“$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}|\leqslant 3$”的　(　　)

A. 充分而不必要条件　　B. 必要而不充分条件

C. 充分必要条件　　D. 既不充分也不必要条件

(2)点 M 在$\triangle ABC$ 内部,满足 $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}+4\overrightarrow{MC}=\mathbf{0}$,则 $S_{\triangle MAC}:S_{\triangle MAB}=$________.

◉**例 2**　已知 $m+n=4$(其中 m,n 为正实数),则 $\frac{7}{m+1}+\frac{28}{n+2}$ 的最小值为　(　　)

A. 9　　B. 7　　C. $\frac{30}{7}$　　D. 4

◉**例 3**　在△ABC 中,角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c,且 $\sqrt{3}a\sin C=c\cos A$,$a^2+c^2=b^2+\sqrt{3}ac$.

(1)求 A 和 B 的大小;

(2)若 M,N 是边 AB 上的点,$\angle MCN=\frac{\pi}{3}$,$b=4$,求△CMN 的面积的最小值.

纠错补缺提分精练

（120 分钟　150 分）

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{5}}{5}$，则 $\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=$

A. $-\frac{3}{5}$　　B. $-\frac{1}{5}$　　C. $\frac{2}{5}$　　D. $\frac{3}{5}$

2. 已知 $a\in[-1,1]$，不等式 $x^2+(a-4)x+4-2a>0$ 恒成立，则 x 的取值范围为

A. $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$　　B. $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$

C. $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$　　D. $(1,3)$

3. 设 $a>0,b>0$，若 $a^2+b^2-\sqrt{3}ab=1$，则 $\sqrt{3}a^2-ab$ 的最大值为

A. $3+\sqrt{3}$　　B. $2\sqrt{3}$　　C. $1+\sqrt{3}$　　D. $2+\sqrt{3}$

4. 设函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，已知 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增，则 $f(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上的零点最多有

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

5. 在 $\triangle ABC$ 中，三边长 a,b,c 满足 $a+c=3b$，则 $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{C}{2}$ 的值为

A. $\frac{1}{5}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{1}{2}$　　D. $\frac{2}{3}$

6. 已知梯形 $ABCD$ 中，$AD/\!/BC$，$\angle B=\frac{\pi}{3}$，$AB=2$，$BC=4$，$AD=1$，点 P,Q 在线段 BC 上移动，且 $PQ=1$，则 $\overrightarrow{DP}\cdot\overrightarrow{DQ}$ 的最小值为

A. 1　　B. $\frac{11}{2}$　　C. $\frac{13}{2}$　　D. $\frac{11}{4}$

7. $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c. 已知 $b^2+c^2-a^2=bc$，$b\cos C+c\cos B=2$，则 $\triangle ABC$ 的面积的最大值为

A. 1　　B. $\sqrt{3}$　　C. 2　　D. $2\sqrt{3}$

8. 若正实数 a,b 满足 $a>b$，且 $\ln a\cdot\ln b>0$，则下列不等式一定成立的是

A. $\log_a b<0$　　B. $a-\frac{1}{b}>b-\frac{1}{a}$　　C. $2^{ab+1}<2^{a+b}$　　D. $a^{b-1}<b^{a-1}$

9. 已知菱形 $ABCD$ 的边长为 2，设 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AD}(\lambda\in\mathbf{R})$，若 $|\overrightarrow{AP}|\geqslant 2$ 恒成立，则向量 $\overrightarrow{AD}$ 在 $\overrightarrow{AB}$ 方向上投影的取值范围是

A. $[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$　　B. $[0,\sqrt{3}]$　　C. $[-1,1]$　　D. $[0,1]$

10. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 所对的边长分别是 a,b,c，且 $\frac{\sin B-\sin A}{\sin C}=\frac{\sqrt{2}a+c}{a+b}$，若将函数 $f(x)=2\sin(2x+B)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$ 的图象，则下列说法中正确的是

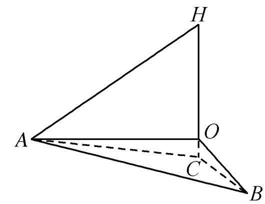
A. 函数 $g(x)$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

B. 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{5}{12}\pi$ 对称

C. 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$时，函数 $g(x)$的最小值为$-\sqrt{2}$

D. 函数 $g(x)$在 $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$上单调递增

11. 某气象仪器研究所按以下方案测试一种“弹射型”气象观测仪器的垂直弹射高度：在 C 处（点 C 在水平地面下方，O 为 CH 与水平地面 ABO 的交点）进行该仪器的垂直弹射，水平地面上两个观察点 A，B 两地相距 100 米，$\angle BAC=60°$，其中 A 到 C 的距离比 B 到 C 的距离远 40 米. A 地测得该仪器在 C 处的俯角为$\angle OAC=15°$，A 地测得最高点 H 的仰角为$\angle HAO=30°$，则该仪器的垂直弹射高度 CH 为（　　）米



A. $210(\sqrt{6}+\sqrt{2})$　　B. $140\sqrt{6}$

C. $210\sqrt{2}$　　D. $20(\sqrt{6}-\sqrt{2})$

12. 在△ABC 中，已知 $\sin A\sin B\sin(C-\theta)=\lambda\sin^2 C$，其中 $\tan\theta=\frac{1}{3}$（其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$），若$\frac{1}{\tan A}+\frac{1}{\tan B}+\frac{2}{\tan C}$为定值，则实数 λ 的值是

A. $\frac{\sqrt{10}}{20}$　　B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　　C. $\sqrt{10}$　　D. $\frac{\sqrt{5}}{10}$

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 在△ABC 中，已知 $AB=3$，$AC=2$，$BC=\sqrt{10}$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$________.

14. 函数 $y=\frac{(x+5)(x+2)}{x+1}(x>-1)$的最小值为________.

15. 设 $\varphi\in[0,2\pi)$，若关于 x 的方程 $\sin(2x+\varphi)=a$ 在区间$[0,\pi]$上有三个解，且它们的和为$\frac{7\pi}{6}$，则 $\varphi=$________.

16. 已知平面向量 $\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 满足$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{3}$，$2\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}$ 与 $2\boldsymbol{n}-\boldsymbol{m}$ 的夹角为 $60°$，则$|\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}|$的取值范围是________.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程及演算步骤.

17.（10 分）

△ABC 中，内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，D 是 AC 的中点，已知平面向量 $\boldsymbol{m}$、$\boldsymbol{n}$ 满足 $\boldsymbol{n}=(\sin A-\sin B,\sin B-\sin C)$，$\boldsymbol{n}=(a+b,c)$，$\boldsymbol{m}\perp\boldsymbol{n}$.

(1)求 A；

(2)若 $BD=\sqrt{3}$，$b+2c=4\sqrt{3}$，求△ABC 的面积.

18.（12 分）

已知函数 $f(x)=\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+\frac{x}{2}\right)$.

(1)求 $f(x)$在 $x\in[0,\pi]$上的单调区间；

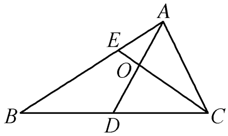
(2)设 $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$f(\alpha)=1$，$f(\beta)=\frac{\sqrt{6}}{4}$，求 $f(\alpha+\beta)$的值.

19.（12 分）

如图，在$\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E 在边 AB 上，$BE=2EA$，AD 与 CE 交于点 O.

(1)设$\overrightarrow{BO}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，求 $x+y$ 的值；

(2)若$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{EC}$，求$\frac{AB}{AC}$的值.

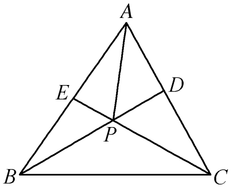


20. (12 分)

如图，在$\triangle ABC$中，$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$，点 D 是 AC 上一点，BD 与 CE 交于点 P，且$\overrightarrow{AP}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$.

(1)若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AD}$，求实数 λ 的值；

(2)若$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，求证：$\tan B=2\tan C$.



21. (12 分)

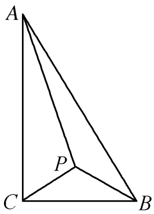
在平面四边形 $ABCD$ 中，已知 $AD/\!/BC$，$\angle CBD=\angle BDC=\alpha$，$\angle ACD=\beta$.

(1)若 $\alpha=30°$，$\beta=75°$，$\sqrt{3}AC+\sqrt{2}CD=5$，求 AC，CD 的长；

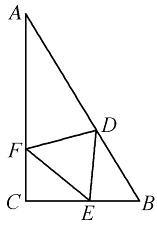
(2)若 $\alpha+\beta>90°$，求证：$AB<AD$.

22.(12分)

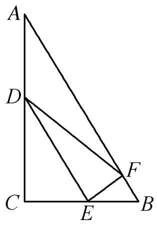
如图,某公园改建一个三角形池塘,$\angle C=90^{\circ}$,$AB=2$百米,$BC=1$百米,现准备养一批观赏鱼供游客观赏.



图①



图②



图③

(1)若在$\triangle ABC$内部取一点P,建造APC连廊供游客观赏,如图①,使得点P是等腰三角形PBC的顶点,且$\angle CPB=\frac{2\pi}{3}$,求连廊$AP+PC+PB$的长(单位为百米);

(2)若分别在AB,BC,CA上取点D,E,F,并连建造连廊,使得$\triangle DEF$变成池中池,放养更名贵的鱼类供游客观赏,如图②,使得$\triangle DEF$为正三角形,或者如图③,使得DE平行AB,且EF垂直DE,则两种方案的$\triangle DEF$的面积分别设为S_2,S_3,则S_2和S_3哪一个更小?