

2022~2023 学年高三第五次联考试卷(样)

数 学

考生注意:

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分,考试时间 120 分钟。
2. 答题前,考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时,请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后,用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑;非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效,在试题卷、草稿纸上作答无效。
4. 本卷命题范围:集合、常用逻辑用语、不等式、函数、导数、三角函数及解三角形(含三角恒等变换)、平面向量、复数、数列、立体几何(约 50%)、解析几何(约 50%)。

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知复数 $z = \frac{3+2i}{1-i}$ (i 为虚数单位),则 $|\bar{z} + 2i| =$
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{\sqrt{82}}{2}$ D. $\frac{41}{2}$
2. 已知全集 $U = \mathbf{R}$,集合 $A = \{x | x^2 \geq 9\}$, $B = \{x | 3^x - 3 \geq 0\}$,则 $(\complement_U A) \cap B =$
A. $[3, +\infty)$ B. $[1, 3]$ C. $[1, 3)$ D. $(1, 3)$
3. 已知平面向量 a, b 满足 $a = (\sqrt{3}, 1)$, $|b| = \sqrt{3}$, $|a+b| = \sqrt{13}$,则 a 与 b 的夹角为
A. $\frac{2\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$
4. 已知直线 $x+y-5=0$ 与圆 $C: x^2+y^2-4x+2y+m=0$ 相交于 A, B 两点,且 $|AB|=4$,则实数 $m =$
A. -19 B. -7 C. -4 D. -1
5. 已知直线 $l_1: (a-2)x+ay+2=0$, $l_2: x+(a-2)y+a=0$,则“ $a=-1$ ”是“ $l_1 \perp l_2$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
6. 已知一个圆锥的母线长为 6,侧面积为 24π ,则此圆锥的体积为
A. $\frac{16\sqrt{5}\pi}{3}$ B. $6\sqrt{5}\pi$ C. $\frac{32\sqrt{5}\pi}{3}$ D. $12\sqrt{5}\pi$
7. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $x^2 - \frac{y^2}{24} = 1$ 的左、右焦点,若 P 是双曲线左支上的点,且 $|PF_1| \cdot |PF_2| = 48$.
则 $\triangle F_1PF_2$ 的面积为
A. 8 B. 16 C. 24 D. $8\sqrt{3}$

8. 已知斜率为 2 的直线 l 与双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 相交于 A, B 两点, 且 AB 的中点是

$M(2, 1)$, 则 C 的渐近线方程是

A. $y = \pm x$

B. $y = \pm \sqrt{3}x$

C. $y = \pm 2x$

D. $y = \pm \sqrt{5}x$

9. 若正数 a, b 满足 $a + 2b = ab$, 则 $a + b$ 的最小值是

A. 6

B. $2 + 2\sqrt{2}$

C. $3 + 2\sqrt{2}$

D. 7

10. 已知点 $P(x, y)$ 是直线 $3x + y - 7 = 0$ 上的一点, 过点 P 作圆 $C: x^2 + y^2 + 6x - 2y + 1 = 0$ 的两条切线, 切点分别是点 A, B , 则四边形 $PACB$ 的面积的最小值为

A. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$

B. $\frac{9\sqrt{6}}{2}$

C. $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

D. $\frac{9\sqrt{6}}{4}$

11. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2-x)$, 当 $x \in [0, 1]$ 时, $f(x) = 2^x - 1$, 则函数 $g(x) = |\sin(2\pi x)| - f(x)$ 在区间 $[-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ 上的所有零点的和是

A. 10

B. 8

C. 6

D. 4

12. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 点 P 是 C 上的一点, $\tan \angle PF_1 F_2 = \frac{1}{3}$,

$\tan \angle F_1 P F_2 = \frac{4}{3}$, 则 C 的离心率是

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$

D. $\frac{\sqrt{10}}{5}$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 若直线 $l_1: x + my + 6 = 0$ 与 $l_2: (m-2)x + 3y + 2m = 0$ 平行, 则 l_1 与 l_2 间的距离为_____.

14. 已知双曲线 C 的中心在坐标原点, 一个焦点与抛物线 $y = \frac{x^2}{12}$ 的焦点相同, 且它的一条渐近线方程为

$y = \frac{2\sqrt{5}}{5}x$, 则 C 的方程为_____.

15. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右顶点分别为 A_1, A_2 , 过 A_1 的直线 l 交 C 于另外一点 P , 若直线 l 的斜率为 2, 则直线 PA_2 的斜率是_____.

16. 已知抛物线 $C: x^2 = 4y$ 的焦点是 F , 过 F 的直线 l 交 C 于不同的 A, B 两点, 则 $(|AF| + 1) \cdot |BF|$ 的最小值是_____.

三、解答题:共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 三个内角 A, B, C 的对边, $c(1 + \cos B) = \sqrt{3}b \sin C$.

- (1) 求角 B 的大小;
- (2) 若 $b = 2, a + c = 4$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

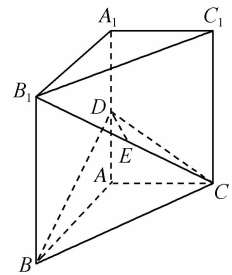
已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_n}{n} = \frac{1}{n(n+1)} (n \in \mathbf{N}^*)$, 且 $a_1 = 1$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_n}{3^{n-1}}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB \perp AC$, D, E 分别为 AA_1, B_1C 的中点.

- (1) 求证: $DE \parallel$ 平面 ABC ;
- (2) 若 $DE \perp BC$, 二面角 $A - BD - C$ 的大小为 $\frac{\pi}{3}$, 求直线 B_1C 与平面 BCD 所成角的大小.



20. (本小题满分 12 分)

已知圆 C 的圆心在直线 $x+y-2=0$ 上, 且经过 $A(1,0), B(2,-1)$.

(1) 求圆 C 的标准方程;

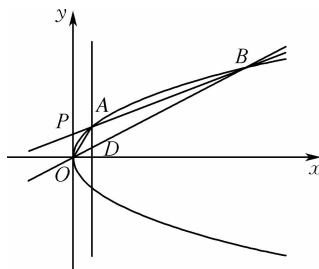
(2) 过 $P(1,2)$ 的直线 l 与圆 C 交于不同的两点 M, N , 记直线 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 试判断 k_1+k_2 是否为定值? 若是, 则求出该定值; 若不是, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

如图所示, 已知抛物线 $C: y^2=2x$, 过点 $P(0,1)$ 的直线 l 交 C 于不同的 A, B 两点 (点 A 在 P, B 之间), 记点 A, B 的纵坐标分别为 y_1, y_2 , 过 A 作 x 轴的垂线交直线 OB 于点 D (O 为坐标原点).

(1) 求证: $\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2} = 1$;

(2) 求 $\triangle OAD$ 的面积的最大值.



22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2ae^x + 2\ln a - 6$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程;

(2) 若 $f(x) \geq \ln(x^2+6x+9)$ 在 $x \in (-3, +\infty)$ 上恒成立, 求实数 a 的取值范围.