

2023 届高三名校周考阶梯训练·数学卷(六)

导数的应用

满分分值:100 分

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $f(x)=1-x\ln x$ 的单调递增区间是

- A. $(-\infty, \frac{1}{e})$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $(0, e)$

2. 函数 $f(x)=\sin x+\frac{x}{2}, x\in[0, \pi]$ 的极值点是 $x=$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

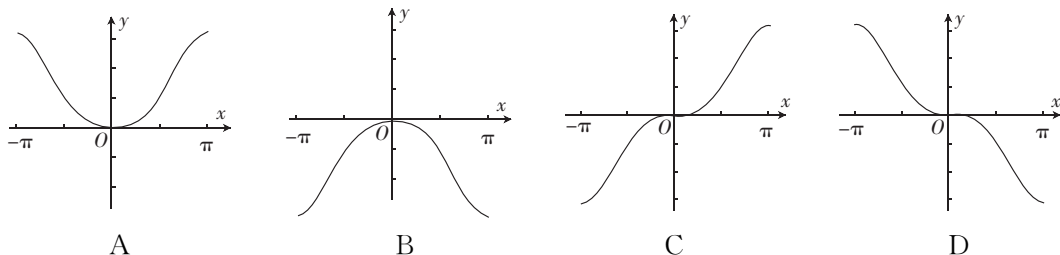
3. 函数 $f(x)=(x-2)\cdot e^x$ 的最小值为

- A. -2 B. -e C. -1 D. 0

4. 若函数 $f(x)=ax^3+x^2$ 在区间 $[1, 2]$ 内存在递减区间, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ B. $(-\infty, -\frac{2}{3})$
C. $(-\infty, -\frac{1}{3})$ D. $(-\frac{1}{3}, +\infty)$

5. 函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=x\sin x$, 则 $y=f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象可以为



6. 若关于 x 的不等式 $\tan x > ax$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

7. 若过点 $P(2a, 2a)$ 与函数 $f(x)=x\ln x$ 的图象在 $x=x_0$ 处相切的直线有且只有两条, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{e})$ D. $(\frac{1}{2}e, +\infty)$

8. 已知函数 $f(x) = 4a \ln(x+1) - x^2$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_2+1) - f(x_1+1) > x_2 - x_1$ 成立, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[15, +\infty)$ B. $(-\infty, 6]$ C. $(-\infty, \frac{3}{2}]$ D. $[\frac{15}{4}, +\infty)$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知函数 $f(x)$ 及其导数 $f'(x)$, 若存在 x_0 使得 $f(x_0) = f'(x_0)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个“巧值点”。下列函数中有“巧值点”的是

- A. $f(x) = x^2$ B. $f(x) = e^{-x}$
C. $f(x) = \ln x$ D. $f(x) = x + \frac{1}{x}$

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x) > 1 - f(x)$, $f(0) = 2$, 函数 $g(x) = e^x f(x) - e^x - 1$, 则下列说法正确的是

- A. 函数 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调函数 B. 不等式 $g(x) > 0$ 的解集为 $(0, +\infty)$
C. 函数 $g(x)$ 有唯一零点 D. 函数 $h(x) = e^x f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数

11. 已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a(x-1)^2 (a > 0)$, 则下列说法正确的是

- A. 函数 $f(x)$ 的极小值为 $-e$ B. $f(2) > 0$
C. 函数 $f(x)$ 在区间 $(1, 2)$ 上存在一个零点 D. 当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$

12. 设 $f'(x)$ 为函数 $f(x)$ 的导函数, 已知 $x^2 f'(x) + x f(x) = \ln x$, $f(1) = \frac{1}{2}$, 则下列结论不正确的是

- A. $3f(3) < 2f(2)$ B. $\frac{1}{3}f(\frac{1}{3}) > \frac{1}{2}f(\frac{1}{2})$
C. $xf(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有极小值 $\frac{1}{2}$ D. $xf(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有极大值 $\frac{1}{2}$

选择题答题栏

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $y = ax^3 + bx^2 (a > 0)$ 的两个极值点的差为 $\frac{2}{3}$, 且一个极小值点为 $x = 0$, 则 $\frac{a}{b} =$ _____.

14. 若直线 $l: x - a = 0$ 交抛物线 $y = x^2 + 1$ 、函数 $y = \ln x$ 的图象分别于 M, N 两点, 则线段 MN 长的最小值是 _____.

15. 已知函数 $f(x)=\begin{cases} x\ln x, & x>1, \\ -x^2+2x+k, & x\leq 1, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x)-1=0$ 有两个不同实数根, 则实

数 k 的取值范围是_____.

16. 若函数 $f(x)=x^2-e^x-ax$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在单调递增区间, 则实数 a 的取值范围为_____.

四、解答题: 共 20 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x)=\ln x+1, g(x)=-\frac{k}{x}+k+1$.

(1) 当 $k=e$ 时, 讨论函数 $h(x)=f(x)-g(x)$ 的极值;

(2) 若 $f(x)\geq g(x)$ 对任意的 $x\in(0,+\infty)$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

18. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 + (2a-1)x$ ($a \in \mathbf{R}$) 有两个不同的零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 > 2a$.