

2023 届高三名校周考阶梯训练·数学卷(六)

导数的应用

满分分值:100 分

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分。在每题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 函数 $f(x)=1-x\ln x$ 的单调递增区间是

- A. $(-\infty, \frac{1}{e})$ B. $(0, \frac{1}{e})$ C. $(\frac{1}{e}, +\infty)$ D. $(0, e)$

2. 函数 $f(x)=\sin x+\frac{x}{2}, x\in[0, \pi]$ 的极值点是 $x=$

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

3. 函数 $f(x)=(x-2)\cdot e^x$ 的最小值为

- A. -2 B. -e C. -1 D. 0

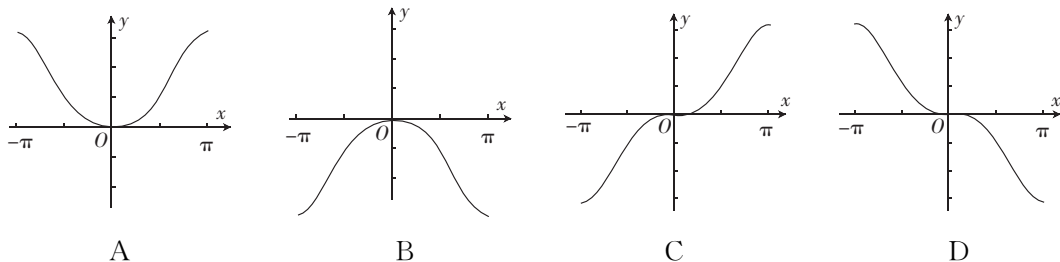
4. 若函数 $f(x)=ax^3+x^2$ 在区间 $[1, 2]$ 内存在递减区间, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\frac{2}{3}, +\infty)$ B. $(-\infty, -\frac{2}{3})$
C. $(-\infty, -\frac{1}{3})$ D. $(-\frac{1}{3}, +\infty)$

5. 已知函数 $f(x)=\ln x-mx+1$, 则“ $m>0$ ”是“ $f(x)$ 恒小于零”的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

6. 函数 $y=f(x)$ 的导函数为 $f'(x)=x\sin x$, 则 $y=f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象可以为



7. 设函数 $f(x)=x\ln|x|$, 则关于 x 的方程 $[f(x)]^2-m=0$ 的实数根的个数不可能为

- A. 6 B. 4 C. 3 D. 2

8. 关于函数 $f(x) = e^x(-x^2 + x + 1)$ 有下述四个结论:

- ① $f(x)$ 有 3 个零点 ② $f(x)$ 无最小值有最大值
 ③ $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调递减 ④ $f(x)$ 既有极大值又有极小值

其中所有正确结论的编号是

- A. ③④ B. ②④ C. ②③ D. ①②④

9. 若关于 x 的不等式 $\tan x > ax$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上恒成立, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 2)$ B. $(-\infty, 2]$ C. $(-\infty, 1)$ D. $(-\infty, 1]$

10. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 且 $f'(x) > 1 - f(x)$, $f(0) = 2$, 则不等式 $f(x) > 1 + e^{-x}$ 解集为

- A. $(-1, +\infty)$ B. $(e, +\infty)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(0, +\infty)$

11. 若过点 $P(2a, 2a)$ 与函数 $f(x) = x \ln x$ 的图象在 $x = x_0$ 处相切的直线有且只有两条, 则实数 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0)$ B. $(1, +\infty)$ C. $(0, \frac{1}{e})$ D. $(\frac{1}{2}e, +\infty)$

12. 已知函数 $f(x) = 4a \ln(x+1) - x^2$, 若对任意的 $x_1, x_2 \in (0, 1)$, 且 $x_1 < x_2$, 有 $f(x_2 + 1) - f(x_1 + 1) > x_2 - x_1$ 成立, 则实数 a 的取值范围是

- A. $[15, +\infty)$ B. $(-\infty, 6]$ C. $(-\infty, \frac{3}{2}]$ D. $[\frac{15}{4}, +\infty)$

选择题答题栏

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知函数 $y = ax^3 + bx^2$ ($a > 0$) 的两个极值点的差为 $\frac{2}{3}$, 且一个极小值点为 $x = 0$, 则 $\frac{a}{b} =$ _____.

14. 若直线 $l: x - a = 0$ 交抛物线 $y = x^2 + 1$ 、函数 $y = \ln x$ 的图象分别于 M, N 两点, 则线段 MN 长的最小值是_____.

15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 1, \\ -x^2 + 2x + k, & x \leq 1, \end{cases}$ 若关于 x 的方程 $f(x) - 1 = 0$ 有两个不同实数根, 则实数 k 的取值范围是_____.

16. 若函数 $f(x) = x^2 - e^x - ax$ 在 $\mathbf{R}$ 上存在单调递增区间, 则实数 a 的取值范围为_____.

三、解答题:共 20 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \ln x + 1$, $g(x) = -\frac{k}{x} + k + 1$.

(1) 当 $k = e$ 时, 讨论函数 $h(x) = f(x) - g(x)$ 的极值;

(2) 若 $f(x) \geq g(x)$ 对任意的 $x \in (0, +\infty)$ 成立, 求实数 k 的取值范围.

18. (本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x - x^2 + (2a - 1)x$ ($a \in \mathbf{R}$) 有两个不同的零点.

(1) 求 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个零点, 证明: $x_1 + x_2 > 2a$.