

2023 届全国名校高三单元检测示范卷·数学(一)

集合与常用逻辑用语

(本卷满分:150 分)

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知全集 U , 集合 A, B 为其子集, 若 $A \cap (\complement_U B) = \emptyset$, 则 $A \cup B =$
A. $\complement_U A$ B. $\complement_U B$ C. A D. B
2. 设命题 $p: \forall x > 0, x^2 > 0$, 则 $\neg p$ 为
A. $\exists x_0 \leq 0, x_0^2 \leq 0$ B. $\forall x \leq 0, x^2 > 0$
C. $\forall x > 0, x^2 \leq 0$ D. $\exists x_0 > 0, x_0^2 \leq 0$
3. 已知全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x | 1 < e^x < 5\}$, $B = \{x | x < a\}$, 若 $(\complement_U A) \cup B = \mathbf{R}$, 则实数 a 的取值范围是
A. $[\ln 5, +\infty)$ B. $(\ln 5, +\infty)$
C. $(-\infty, \ln 5)$ D. $[0, +\infty)$
4. “ $x + y > 2$ ”是“ $\begin{cases} x > 1, \\ y > 1 \end{cases}$ ”的
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
5. 已知集合 $A = \{x | -2 < x < 4\}$, $B = \left\{x \left| y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{4 - 2x}} \right.\right\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$
A. $\{x | x \geq 2\}$ B. $\{x | x < 4\}$
C. $\{x | 2 < x < 4\}$ D. $\{x | 2 \leq x < 4\}$
6. 已知集合 $S = \{s | s = 2n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, $T = \{t | t = 4n + 1, n \in \mathbf{Z}\}$, 则 $S \cap T =$
A. $\emptyset$ B. S
C. T D. $\mathbf{Z}$
7. 已知 $A = \{(x, y) | y > x^2\}$, $B = \{(x, y) | y < 2 - |x - a|\}$, 若 $A \cap B = \emptyset$, 则实数 a 的取值范围是
A. $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ B. $(-2, 2)$
C. $(-\infty, -\frac{9}{4}] \cup [\frac{9}{4}, +\infty)$ D. $(-\infty, -\frac{7}{4}] \cup [\frac{7}{4}, +\infty)$

8. 已知“不等式 $|x - m| < 1$ 成立”的一个充分不必要条件是“ $\frac{1}{3} < x < \frac{1}{2}$ ”, 则实数 m 的取值范围是

- A. $(-\infty, -\frac{1}{2}]$ B. $[-\frac{4}{3}, \frac{1}{2}]$
C. $[\frac{4}{3}, +\infty)$ D. $[-\frac{1}{2}, \frac{4}{3}]$

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分)

9. 下列命题正确的是
- A. “ $x > 1$ ”是“ $\frac{1}{x} < 1$ ”的充分不必要条件
B. “ $a < b$ ”是“ $\ln a < \ln b$ ”的必要不充分条件
C. 命题“ $\forall x > 1, x - 1 > 0$ ”的否定是“ $\exists x_0 \leq 1, x - 1 \leq 0$ ”
D. “ $a = 3$ ”是“直线 $ax + 2y + 3a = 0$ 和直线 $3x + (a - 1)y + 7 - a = 0$ ”平行的充要条件
10. 已知集合 $A = \left\{x \left| \frac{x - 2}{x} \leq 0 (x \in \mathbf{N}) \right.\right\}$, $B = \{x | \sqrt{x} \leq 2 (x \in \mathbf{Z})\}$, 则下列表述正确的有
A. $A \cap B = \{0, 3, 4\}$
B. $A = \{1, 2\}$
C. $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$
D. 满足 $A \subseteq C$ 且 $C \subseteq B$ 的集合 C 的个数为 8
11. 下列命题正确的是
- A. $\forall x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^x$
B. $\forall x \in (0, 1), \log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{3}} x$
C. $\exists x \in (0, 1), x^{\frac{1}{2}} > x^{\frac{1}{3}}$
D. $\exists x \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} x$

12. 对于全集 U 的子集 A 定义函数 $f_A(x) = \begin{cases} 1(x \in A), \\ 0(x \in \complement_U A) \end{cases}$ 为 A 的

特征函数, 设 A, B 为全集 U 的子集, 则下列结论中正确的是

A. 若 $A \subseteq B$, 则 $f_A(x) \leq f_B(x)$

B. $f_{\complement_U A}(x) = 1 - f_A(x)$

C. $f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cdot f_B(x)$

D. $f_{A \cup B}(x) = f_A(x) + f_B(x)$

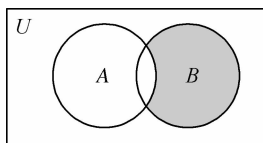
选择题答题栏

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

三、填空题(本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 如图, 全集 $U = \mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid \log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 0\}$, $B = \{x \mid 0 < x < \frac{3}{2}\}$, 则 $\complement_U A =$ _____, 阴影部分表示的集合是 _____.

(本小题第一空 2 分, 第二空 3 分)



14. 若关于 x 的不等式 $ax^2 - 2x + a < 0$ 成立的充要条件是 $x \neq \frac{1}{a}$, 则实数 $a =$ _____.

15. 已知 $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$, 则“ $|x| + |y| < 1$ ”是“ $x^2 + y^2 < 1$ ”的 _____ (填“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”).

16. 记实数集 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 中的最大数为 $\max\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, 最小数为 $\min\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. 已知 $\triangle ABC$ 的三边长分别为 a, b, c ($a \leq b \leq c$), 定义它的倾斜度为 $t = \max\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\} \cdot \min\left\{\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right\}$, 则“ $t = 1$ ”是“ $\triangle ABC$ 为等边三角形”的 _____. (填“充分不必要条件”“必要不充分条件”“充要条件”“既不充分也不必要条件”)

四、解答题(本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分 10 分)

在① $C = \{x \mid -1 + m < x < 2m\}$, $C \subseteq B$, ② $C = [-1 + m, 2m]$, $C \subseteq B$ 这两个条件中任选一个填入在下面试题中的横线上, 使得试题完整, 并完成试题的求解.

已知集合 $A = \{x \mid x \leq 1\}$, $B = \{x \mid (x+2)(x-3) > 0\}$.

(1) 求 $A \cap B$;

(2) 若 _____, 求实数 m 的取值范围.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

18. (本小题满分 12 分)

已知 p : 函数 $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{a}{x} + 1\right)$ 在区间 $[-2, -1]$ 上单调递增;

q : 函数 $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + ax$ 在区间 $[3, +\infty)$ 上单调递减.

(1) 若 q 是真命题, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若 p, q 中有一个为真命题, 一个为假命题, 求实数 a 的取值范围.

19. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

(1) 若存在 $x_0 \in \left(\frac{\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}\right)$ 使得 $f(x_0) = 2$ 成立, 求 x_0 的值;

(2) 设 $p: x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]; q: -3 < f(x) - m < \sqrt{3}$, 若 p 是 q 的充分条件, 求实数 m 的取值范围.

20. (本小题满分 12 分)

已知集合 $A = \{x | (x-2)(x-3a-1) < 0\}, B = \{x | (x-2a)(x-a^2-1) < 0\}$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求 $A \cap B$;

(2) 当 $a=1$ 时, 判定 A 与 B 之间的关系;

(3) 若 $B \subseteq A$, 求实数 a 的取值范围.

21. (本小题满分 12 分)

已知集合 $P = \{x \mid (x^2 + x + 1)(x^2 - 8x - 20) \leq 0 (x \in \mathbf{R})\}$, $S = \{x \mid |x - 1| \leq m (x \in \mathbf{R})\}$.

(1) 若 $(P \cup S) \subseteq P$, 求实数 m 的取值范围;

(2) 是否存在实数 m 使“ $x \in P$ ”是“ $x \in S$ ”的充要条件? 若存在, 求出 m 的取值范围; 若不存在, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知集合 $P_n = \{1, 2, \dots, n\}, n \in \mathbf{N}^*$. 记 $f(n)$ 为同时满足下列条件的集合 A 的个数: ① $A \subseteq P_n$; ② 若 $x \in A$, 则 $2x \notin A$; ③ 若 $x \in \complement_{P_n} A$, 则 $2x \notin \complement_{P_n} A$.

(1) 求 $f(4)$;

(2) 求 $f(n)$ 的解析式 (用 n 表示).